МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНИКА»

ФАКУЛЬТЕТ ПРИРОДНИЧИХ НАУК ТА ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра прикладної математики

О.О. Сдвижкова, Д.В. Бабець, С.Є. Тимченко, Д.В. Клименко

ФУНКЦІЯ. ГРАНИЦЯ. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЇ.

Методичні рекомендації до практичних занять
з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 «Прикладна математика»

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Сдвижкова О.О.

Функція. Границя. Обчислення границь функції : методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» / О.О. Сдвижкова, Д.В. Бабець, С.Є. Тимченко, Д.В. Клименко ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 42 с.

Автори:
О.О. Сдвижкова д-р техн. наук, проф.
Д.В. Бабець, д-р техн. наук, проф.
С.Є. Тимченко, канд. техн. наук, доц.
Д.В. Клименко, канд. техн. наук, доц.

Затверджено науково-методичною комісією спеціальності 113 «Прикладна математика» (протокол № 01/24 від 20.01.2024) за поданням кафедри прикладної математики (протокол №01/24 від 17.01.2024)

Дані методичні рекомендації до практичних занять містять відомості з теорії, вказівки до розв’язання задач відповідного типу, розібрані контрольні приклади, завдання з відповідями для самостійної роботи студентів, а також варіанти індивідуальних завдань з кожного розглянутого розділу.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри прикладної математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Вступ

Дані методичні вказівки призначено для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика», з дисципліни «Математичний аналіз». Вони також можуть бути рекомендовані для студентів перших курсів технічних закладів вищої освіти всіх форм навчання та науково-педагогічних працівників, які викладають курс вищої математики, зокрема, у дистанційному форматі.

Мета даної методичної розробки надати студентам істотну допомогу при вивченні розділу «Функція. Границя. Похідна та її застосування». Структура цієї роботи складається з теоретичного матеріалу, розібраних прикладів і індивідуальних завдань за розглянутими темами. Всі теоретичні викладки містять ретельні пояснення, доведення та супроводжуються характерними прикладами. Методичні вказівки містять велику кількість розібраних задач. З кожної теми є індивідуальні завдання для перевірки успішності.

Весь матеріал розбитий на параграфи, кожен з яких присвячений окремій темі та має розібрані приклади. Наприкінці розділу наведено індивідуальні завдання для самостійної роботи. Методичні вказівки підготовлені з метою підвищення якості навчання студентів і містять елементи теорії, завдання, методичні вказівки, власне, розв'язання задач та завдання для самостійної роботи.

I. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

1. Визначення функції

Визначення. Нехай X – деяка множина значень змінної x і задано правило, яке кожному числу x з множини X ставить у відповідність певне число y. Цю відповідність називають ***функцією*** y від x та записують $y = f(x)$.

Змінну x називають ***аргументом*** або ***незалежною змінною***. Множина всіх значень X – ***область визначення*** функції. Множина Y всіх значень $y = f(x)$ є ***областю змінення*** функції.

Функція $y = f(x)$ задана якщо:

1) визначено множина X, з якої беруться числа x;
2) вказано закон f, за яким відбувається відображення множини X на множину Y.

1.2. Способи завдання функції

Відповідність між x і y яке визначає функцію $y = f(x)$, встановлює різними способами.

Табличний спосіб припускає наявність деякій таблиці, в якій розміщені частині значення x и відповідні їм значення y. Наприклад, тригонометричні, логарифмічні и інші таблиці.

Графічний спосіб задає графік функції $y = f(x)$, тобто визначає на площині xOy лінію, для якої рівність $y = f(x)$ є її рівнянням.

Аналітичний спосіб виражає відповідність $y = f(x)$ за допомогою деякого аналітичного виразу, тобто за допомогою одної або декількох формул, рівняння.

Також існують неявні способи завдання функції, наприклад, **параметричний,** коли величини x і y є функціями допоміжної змінної, яка зветься параметром: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]$. Наприклад, співвідношення $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$ при $0 \le t \le \pi$ визначають частину еліпсу яка розташована вище оси Ox. Виключив параметр t, замість двох рівнянь одержимо одне:

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2. Спеціальні класи функцій

1. Парні і непарні функції. Функцію $y = f(x)$, яка задана на симетричному проміжку $(-l, l)$, називають **парною,** якщо $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in (-l, l)$. Де в подальшому символ $\forall$ – значіть «для любого». Графік парної функції симетричний відносно оси Oy. До парних функцій, яки задані на всій числовій оси, відносяться: $y = x^2$, $y = \cos x$ і багато інших.

Функцію $y = f(x)$, яка задана на проміжку $(-l, l)$, називають **непарною,** якщо $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in (-l, l)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Прикладом непарних функцій, яки задані на всій числовій оси, є: $y = x^3$, $y = \sin x$ и інші.

2. Періодичні функції. Функцію $y = f(x)$ яка задана на всій числовій оси, називають **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$. Величина T зветься період функції. Якщо T – період, то для будь-якого цілого числа k добуток kT також є періодом функції. Наприклад, функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ мають період 2π, але $T = 2k\pi$, де $k \in N$, також є періодом цих функцій.

3. Монотонні функції. Функцію $y = f(x)$ яка задана на проміжку, називають **зростаючою**, якщо для будь-якої пари x_1 і x_2 з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто, при $x_2 > x_1 \quad f(x_2) > f(x_1)$. Обернена нерівність $f(x_2) < f(x_1)$ при такій же умові $x_2 > x_1$ відповідає **спадаючій** функції. Функції які на проміжку або лише зростають або лише спадають називають **монотонними** на цьому проміжку.

2.3. Основні елементарні функції

Степенева: $y = x^{\alpha}$, де α – будь-яке дійсне число.

Показникова: $y = a^{x}$, де $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 1). $X \in (-\infty, \infty)$, $Y \in (0, \infty)$.

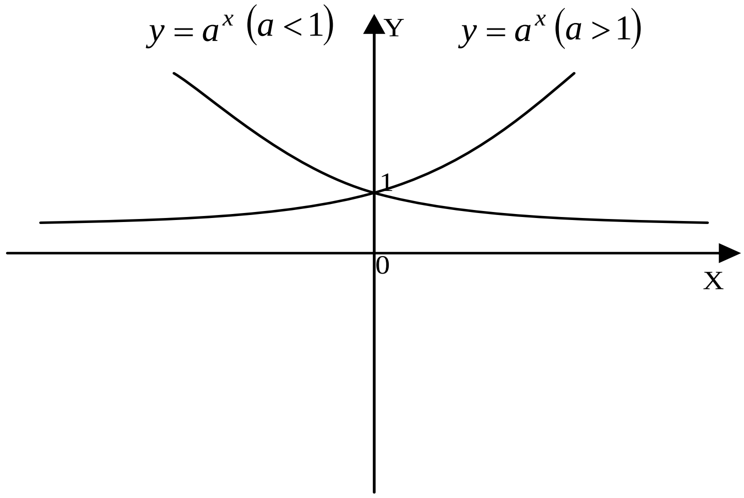


Рис. 1. Показникова функція.

Логарифмічна: $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 2). $X \in (0, \infty)$, $Y \in (-\infty, \infty)$.

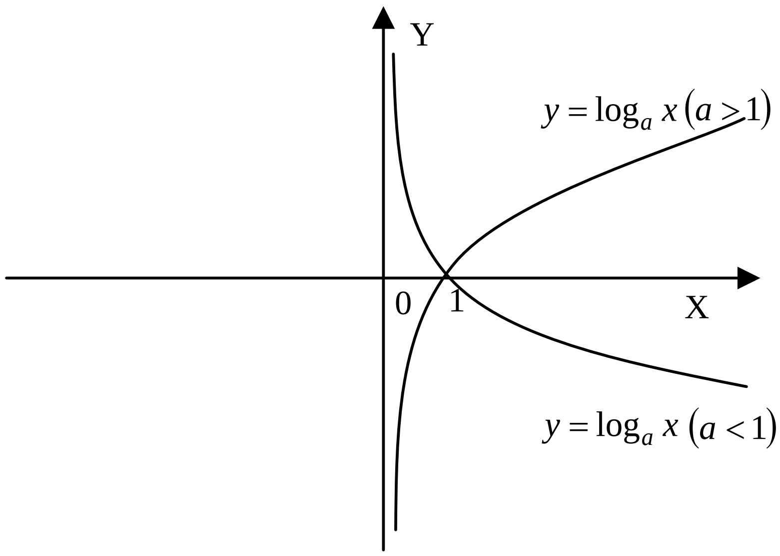


Рис. 2. Логарифмічна функція.

Тригонометричні:

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $X \in (-\infty, \infty)$, $Y \in [-1, 1]$;

$y = tgx$, $X \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$, $k \in Z$, $Y \in (-\infty, \infty)$;

$$y = ctgx,\ X \in (0, \pi) + k\pi, \quad k \in Z, \quad Y \in (-\infty, \infty).$$

Графіки тригонометричних функцій надані на рис. 3.

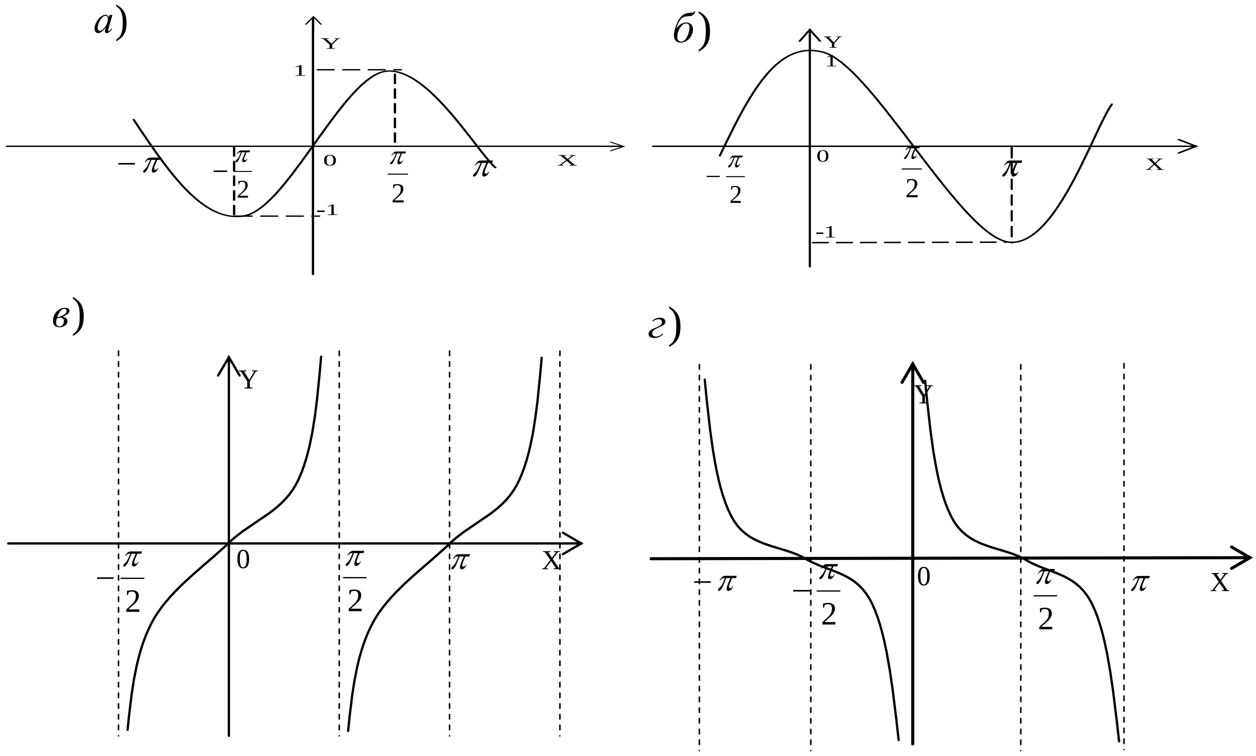


Рис. 3. Графіки тригонометричних функцій:

а) $y = \sin x$, б) $y = \cos x$, в) $y = tgx$, г) $y = ctgx$.

Обернені тригонометричні функції

$$y = \arcsin x,\ X \in [-1, 1], \quad Y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x,\ X \in [-1, 1], \quad Y \in [0, \pi];$$

$$y = arctgx,\ X \in (-\infty, \infty), \quad Y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = arcctgx,\ X \in (-\infty, \infty), \quad Y \in (0, \pi).$$

Графіки обернених тригонометричних функцій надані на рис. 4.

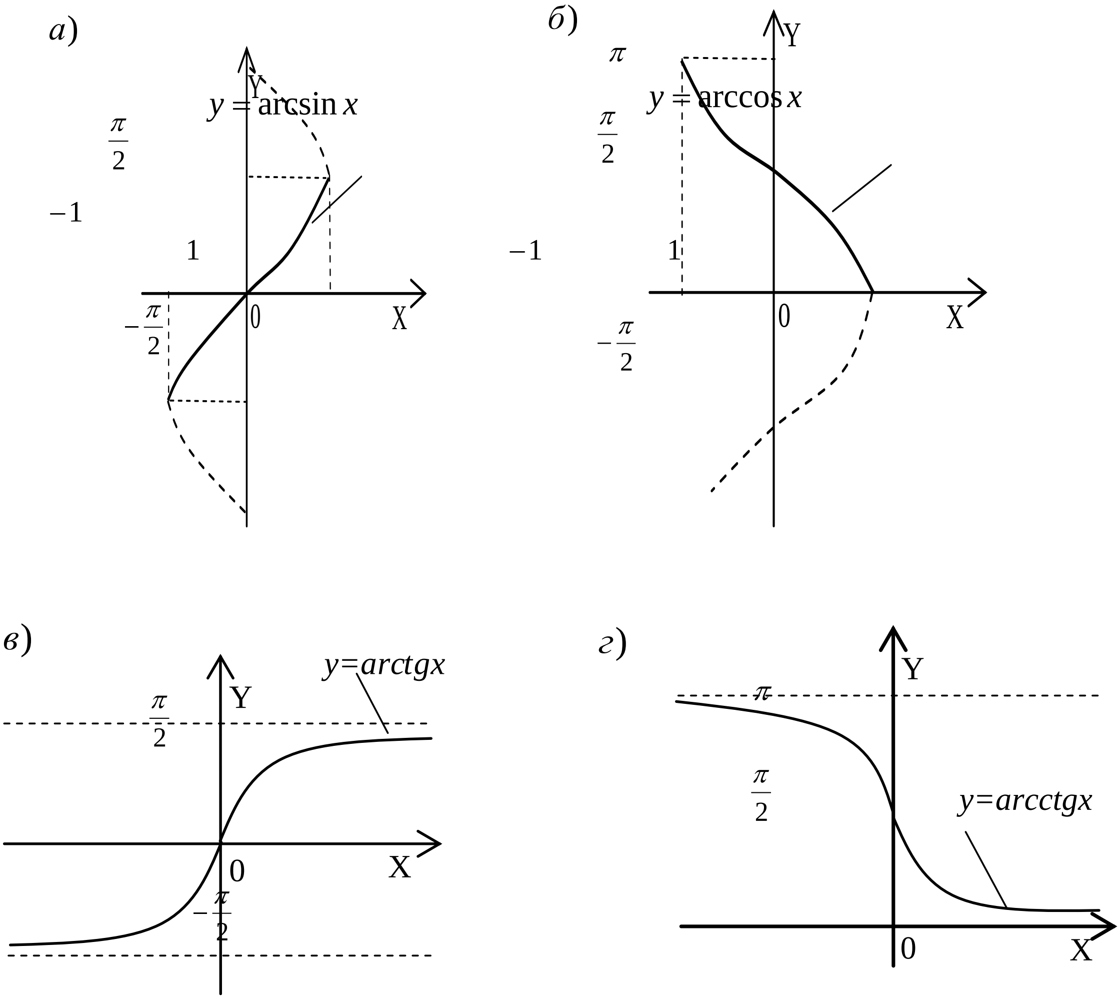


Рис. 4. Графіки обернених тригонометричних функцій:

а) $y = \arcsin x$, б) $y = \arccos x$, в) $y = arctgx$, г) $y = arcctgx$.

II. ГРАНИЦІ

1. Визначення границь

1.1. Границя функції при $x \to \infty$

Визначення. Число a є ***границею функції*** $y = f(x)$ ***коли*** $x \to +\infty$, якщо для будь-якого, скель завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, можна найти таке число N, що для всіх x, більших N, виконується нерівність:

$$\left| f(x) - a \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що значення функції $y = f(x)$ для всіх $x > N$ містяться в полосі, обмеженої прямими $y = a - \varepsilon$ і $y = a + \varepsilon$ (рис. 5).

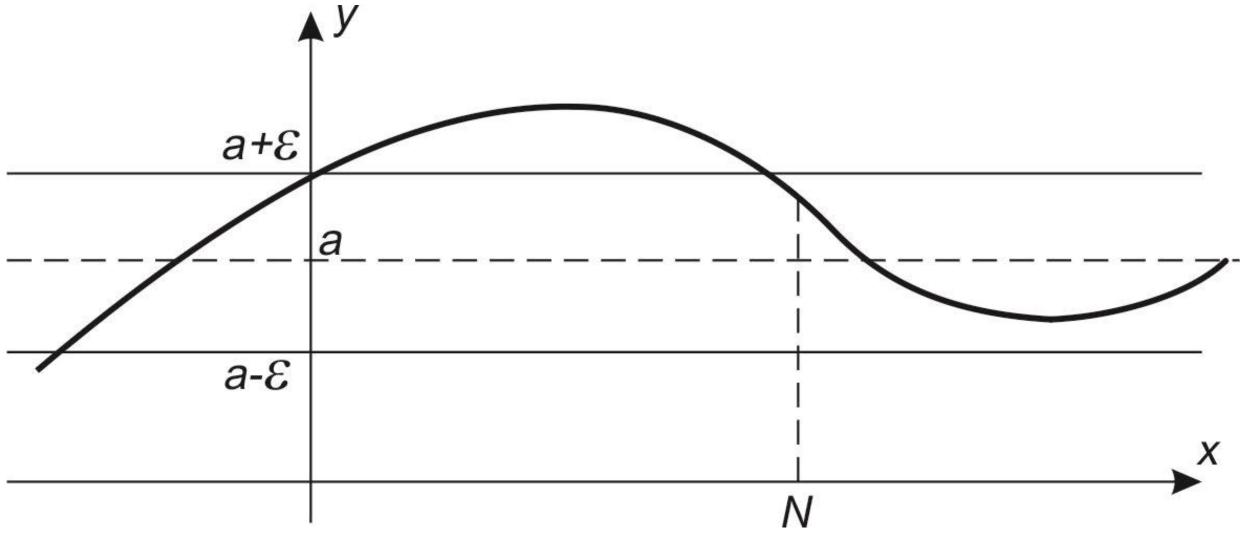


Рис. 5. Визначення границі функції при $x \to +\infty$.

Визначення. Число a зветься **границею функції** $y = f(x)$ **при** $x \to -\infty$, якщо для будь-якого, скель завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, можна знайти таке число N, що для всіх x, менших N, виконується нерівність:

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Це означає, що значення функції $y = f(x)$ для всіх $x < N$ знаходиться в полосі, яка обмежена прямими $y = a - \varepsilon$ і $y = a + \varepsilon$.

1.2. Границя функції при $x \to x_0$

Визначення. Число a зветься **границею функції** $f(x)$ **в точці** x_0 **справа (зліва)** $\left[a = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x), \quad \left(a = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)\right)\right]$, якщо $f(x)$ визначена в деякому околу точки x_0 и для будь-якого, скель завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке $M > x_0$, $(N < x_0)$, що для всіх x $(x_0 < x < M, \quad (N < x < x_0))$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Якщо обидва односторонні межі існують і дорівнюють одна одної, то говорять, що функція $f(x)$ має границю при $x \to x_0$.

Визначення. Число a називається **границею (межею) функції** $y = f(x)$ **в точці** x_0, якщо для будь-якого, скель завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, існують таки числа N и M $(N < x_0 < M)$, що для всіх x з проміжку (N, M), (за виключенням можливо самої точки x_0) справедлива нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$. Використовується позначення:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

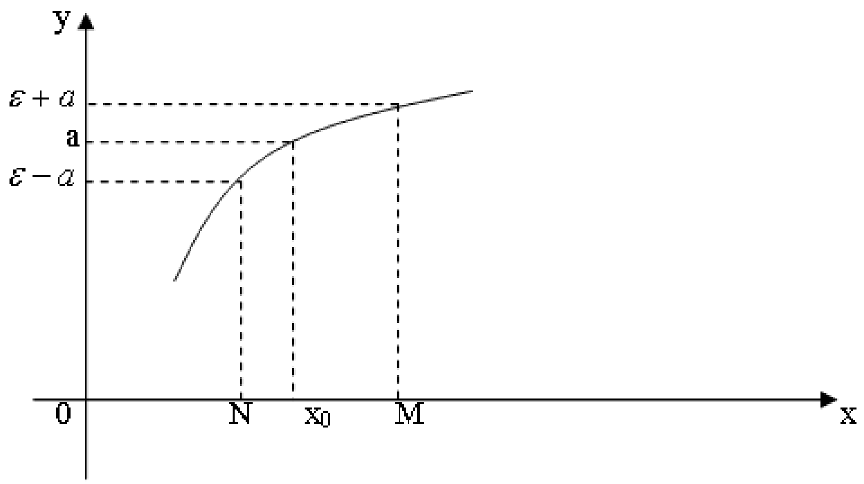


Рис. 6. Визначення границі функції в точці.

Приклад 1. Довести, що $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 2) = 1.$

Розв'язок. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ и покажемо, що існують таки числа M і N, ($N < \mathrm{x}_0 < \mathrm{M}$), що для всіх точок з проміжку (N, M) виконується нерівність $|(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Розв'язуючі цю нерівність одержимо:

$$|3x - 3| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < 3x - 3 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \tfrac{\varepsilon}{3} < x < 1 + \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Різниця між функцією $y = 3x - 2$ і числом 1 буде за абсолютною величиною менш ніж будь-яке скель завгодно мале $\varepsilon > 0$ для всіх значень x, яки знаходяться між числами $N = 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ и $M = 1 + \frac{\varepsilon}{3}$. Тому при $x \to 1$ границею даної функції буде число $a = 1$.

1.3. Нескінченно мали, нескінченно великі та обмежені функції

Функція $f(x)$ зветься **нескінченно малою** при $x \to +\infty$, якщо її границя при $x \to +\infty$ дорівнює нулю ($\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$).

Аналогічно визначається нескінченно малі функції при $x \to -\infty$, $x \to x_0$.

Нескінченно малу функцію будемо позначати « 0 ».

Функція $f(x)$ зветься **нескінченно великою** при $x \to +\infty$, якщо має місто одна з рівностей: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Аналогічно визначаються нескінченно великі функції при $x \to -\infty$, $x \to x_0$. Нескінченно велику функцію будемо позначати « ∞ ».

Функція $f(x)$ зветься **обмеженою** на деякої множені Q значень аргументу *x,* якщо існує таке додатне число *C,* що для всіх $x \in Q$, виконується нерівність $\left| f(x) \right| \le C$.

Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \to x_0$, то вона обмежена в деякому околі точки x_0.

2. Обчислення границь

Якщо $f(x)$ елементарна функція і граничне значення аргументу належіть її області визначення, то обчислення границі функції зводиться до підстановці граничного значення аргументу тобто: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Приклад 2. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to1}(2x^2 + x - 1).$

Розв’язок:

$$\lim_{x\to1}(2x^2 + x - 1) = 2\cdot1^2 + 1 - 1 = 2.$$

Приклад 3. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to-3}(x^3 - 4x^2 + 2x + 1).$

Розв’язок:

$$\lim_{x\to-3}(x^3 - 4x^2 + 2x + 1) = (-3)^3 - 4\cdot(-3)^2 + 2\cdot(-3) + 1 = -68;$$

Приклад 4. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{3x+1}}.$

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-4}{3x+1}}=\sqrt{\frac{2^2-4}{3\cdot 2+1}}=0.$$

3. Границя частки

При обчислені границі частки використається наступна теорема:

Якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю, то границя частки дорівнює частці границь чисельника і знаменника:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Використовуючи позначення, яки були введенні у попередньої главі («∞» – нескінченно велика величина, « 0 » – нескінченно мала величина) запишемо наступні узагальнені правила для обчислення границі частки:

$$\{\frac{b}{0}\}=\infty \qquad \{\frac{b}{\infty}\}=0 \qquad \{\frac{b}{+0}\}=+\infty \qquad \{\frac{b}{-0}\}=-\infty$$

$$\{\frac{\infty}{b}\}=\infty \qquad (b>0); \qquad \{\frac{\infty}{a}\}=-\infty \qquad (a<0);$$

де a и b - обмежені границі.

Випадки « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » і « $\dfrac{0}{0}$ » звуться «невизначеностями», які потребують додаткових досліджень (розкриття невизначеності).

Приклад 5. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25}{x^2+5x+1}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{25}{x^2+5x+1}=\left\{\frac{25}{\infty}\right\}=0.$$

Приклад 6. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\left\{\frac{3}{0}\right\}=\infty.$$

Приклад 7. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^3+x-1}{x-2}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3+x-1}{x-2}=\left\{\frac{9}{-0}\right\}=-\infty.$$

** Позначення $x\to 2-0$ показує, що х наближається до точки 2 «зліва», тобто залишаючись меншим ніж 2. Тоді у знаменнику одержимо нескінченно малу від’ємну величину.*

3.1. Розкриття невизначеності вигляду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Якщо у чисельнику і знаменнику дробі знаходяться алгебраїчні функції, то невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ розкривається діленням чисельника і знаменника на старшую ступінь змінної.

Приклад 8. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-6}{x^4-2}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-6}{x^4-2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^4}}{1-\frac{2}{x^4}}=\left\{\frac{0}{1}\right\}=0.$$

Приклад 9. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^2+\sqrt{x}}{x^2-4x^4}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^2+\sqrt{x}}{x^2-4x^4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^{7/2}}}{\frac{1}{x^2}-4}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{7^x}+\frac{7^{x+2}}{7^x}}{\frac{3}{7^x}-\frac{7^x}{7^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{7^x}+7^2}{\frac{3}{7^x}-1}=-49.$$

Приклад 11. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2}{\sqrt[3]{8x^9+11}}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2}{\sqrt[3]{8x^9+11}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^3}}{\sqrt[3]{8+\frac{11}{x^9}}}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 12. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x+5}{\sqrt{x^3}+3x-1}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x+5}{\sqrt{x^3}+3x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^4}+\frac{5}{x^5}}{\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}}=\left\{\frac{1}{0}\right\}=\infty.$$

Приклад 13. Обчислити границю: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t+3}{t+\sqrt[3]{t}}$.

Розв’язок:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{2t+3}{t+\sqrt[3]{t}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{t}}{1+\dfrac{1}{t^{\frac{2}{3}}}}=\frac{2+0}{1+0}=2.$$

Зауваження: при розкритті невизначеності $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ інколи зручно скористуватися так званим «спрощеним правилом». Нехай даний дріб: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Qn(x)}{Rm(x)}$, де $Qn(x)$, $Rm(x)$ – многочлени з найбільшими ступенями «n» і «m», тоді:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Qn(x)}{Rm(x)}=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad m>n\\ \infty, & \text{якщо} \quad n>m,\\ A, & \text{якщо} \quad m=n\end{cases}$$

де A – відношення коефіцієнтів при найбільших ступенях x в чисельнику і знаменнику.

Приклад 14. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5+7x^4-1}{x(x+4)}$

Розв’язок:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5+7x^4-1}{x(x+4)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\infty$. Найбільший ступень у чисельнику дорівнює 5, а у знаменнику 2, тому границя дорівнює ∞.

Приклад 15. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Розв’язок:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=1$. В чисельнику і знаменнику дробі – добуток з 3-х множників. Для розкриття даної границі досить визначити найбільшу ступінь і коефіцієнти x в чисельнику і знаменнику. Старший ступінь чисельника і знаменника 3, коефіцієнти одинакові рівні 1.

Приклад 16. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2\sqrt{x+1}+3x+2}{\sqrt{5x^5+2}-2x^2+1}$.

<u>Розв'язок</u>:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sqrt{x+1}+3x+2}{\sqrt{5x^5+2}-2x^2+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Найбільша ступінь змінної у чисельнику і у знаменнику $\dfrac{5}{2}$, при цьому коефіцієнт при найбільшому ступеню змінної у чисельнику дорівнює 2, а у знаменнику $\sqrt{5}$, тому границя дорівнює відношенню цих коефіцієнтів $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

3.2. Розкриття невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

Нехай границя має вигляд:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Pn(x)}{Rm(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, тобто $Pn(x_0)\to 0$ і $Rm(x_0)\to 0$ при $x\to x_0$.

У такому випадку в чисельнику і знаменнику необхідно виділити множник виду $(x-x_0)$ і скоротити дріб, щоб усунути невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

<u>Зауваження</u>: необхідно знати формули.

$$x^2-x_0{}^2=(x-x_0)(x+x_0);$$
$$x^3-x_0{}^3=(x-x_0)(x^2+x_0x+x_0{}^2);$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Приклад 17. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$.

<u>Розв'язок</u>:

Знайдемо корені чисельника $x^2-3x+2=0;$ $x_1=2, x_2=1,$ тоді $x^2-3x+2=1\cdot(x-2)(x-1)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1-2}{1+1+1}=\frac{-1}{3}.$$

Приклад 18. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

Розв’язок:

Для того щоб позбавитися від ірраціональності в знаменнику необхідно перенести її із знаменника в чисельник шляхом множення чисельника і знаменника на вираз $\sqrt{x}+\sqrt{2}$, а потім скоротити дріб.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)(x-3)}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}=$$
$$=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x-3)=(\sqrt{2}+\sqrt{2})(2-3)=-2\sqrt{2}.$$

Приклад 19. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=\{\frac{0}{0}\}.$$

Для обчислення даної границі необхідно розділити чисельник і знаменник дробу на вираз $\left(x-x_0\right)$, тобто у даному випадку на $\left(x+2\right)$.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5+2x^4+x^2-3x-10 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5+2x^4\qquad\qquad\qquad} & x^4+x-5 \\
x^2-3x-10 & \\
\underline{x^2+2x\quad} & \\
-\;-5x-10 & \\
\underline{-5x-10} & \\
0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^4+2x^3+3x^2+5x-2 & x+2 \\
\underline{x^4+2x^3\qquad\qquad} & x^3+3x-1 \\
-\,3x^2+5x-2 & \\
\underline{3x^2+6x\quad} & \\
-\,-x-2 & \\
\underline{-x-2} & \\
0 &
\end{array}
$$

Після скорочення одержимо:

$$
\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^4+x-5)(x+2)}{(x^3+3x-1)(x+2)}=
$$

$$
=\lim_{x\to -2}\frac{(x^4+x-5)}{(x^3+3x-1)}==\left\{\frac{((-2)^4+(-2)-5)}{((-2)^3+3\cdot(-2)-1)}=\frac{16-7}{-8-6-1}\right\}=\frac{9}{-15}=-\frac{3}{5}.
$$

Для знаходження границь з невизначеністю виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, у запису яких є тригонометричні функції зручно використовувати **першу визначну границю.**

$$
\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}
$$

Зауваження, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, тоді і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

Приклад 20. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

<u>Розв’язок</u>:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.
$$

Для розв’язування даного прикладу ми помножили чисельник і знаменник дробу на 5, то і звели вираз до 1-ої визначної границі.

Приклад 21. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 5\cdot x\cdot \sin 5x}{2\cdot 5\cdot x\cdot \sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

У даному випадку множимо чисельник і знаменник на $2\cdot 5\cdot x$.

Приклад 21. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\,\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos\frac{2a}{2}\cdot 1=\cos a.$$

У цьому прикладі ми розклали чисельник на множники, а потім розділили чисельник і знаменник на 2.

Приклад 21. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\cdot\sin x}{3x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}.$$

Розв’язування наступної групи прикладів засноване на 1-ої визначної границі та понятті еквівалентних нескінченно малих величин, тобто під знаком границі можна одну нескінченно малу величину замінити на еквівалентну. Приклади еквівалентних нескінченно малих величин:

При $x\to 0$: $\sin\alpha x\sim\alpha x$, $\arcsin\alpha x\sim\alpha x$, $tg\alpha x\sim\alpha x$, $arctgax\sim ax$,

$1-\cos\alpha x\sim\dfrac{\alpha^2x^2}{2}$ так як $1-\cos\alpha x=2\sin^2\dfrac{\alpha x}{2}$.

Приклад 24. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{\sin 3x}$.

Розв'язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 25. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{tg2x\sin x}$.

Розв'язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{tg2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^2x^2}{2}}{2x\cdot x}=\frac{9}{4}.$$

4. Границя добутку та суми

Розглянемо основні правила обчислення меж добутку та суми.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$, і $\lim\limits_{x\to a}v(x)=c$,

тоді $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x))=b+c$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x))=b\cdot c.$

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$, і $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$,

тоді $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x))=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x))=\infty$, при $b\neq 0$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to a}u(x)=\infty$, і $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$,

тоді $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x))=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x))=\infty$.

При розв'язані таких прикладів можуть виникати дві невизначеності $\{0\cdot\infty\}$ і $\{\infty-\infty\}$. Для розкриття цих невизначеностей необхідно привести вирази до правил 1-3 або до розглянутих вище невизначеностям $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Приклад 26. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-\sqrt[3]{x^4})$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}(x^5-\sqrt[3]{x^4})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}(x^{4/3}(x^{11/4}-1))=\infty.$$

В даному прикладі ми виносимо x в меншому ступеню за дужки і таким чином позбавляємося від невизначеності.

Приклад 27. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\lim_{x\to\infty}-\frac{5}{1+1}=-\frac{5}{2}.$$

В даному прикладі ми штучно створюємо знаменник і множимо чисельник і знаменник на сполучений вираз, щоб перенести ірраціональність у знаменник і отримати невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ яку легко можна розкрити.

Приклад 28. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

В цьому прикладі ми привели вираз до спільного знаменника і одержали невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Приклад 29. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{4}{x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{4}{x}=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4(x+1)}{x}\sin\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{4(1+\frac{1}{x})\sin\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}}=4.$$

Для розв’язання даного прикладу помножимо чисельник і знаменник на $\frac{4}{x}$, таким чином перейдемо до 1-ої визначної границі.

5. Границя ступеня

Основні правила обчислення границі **степеневно-показникої** функції $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$ і $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=c$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=b^c$

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$ і $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}0 & b>1\\ \infty & 0<b<1\end{cases}$$

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$ і $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=-\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{якщо} \quad b>1\\ 0, & \text{якщо} \quad 0<b<1\end{cases}$$

4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\infty$, і $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=c$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{якщо} \quad c>0\\ 0, & \text{якщо} \quad c<0\end{cases}$$

5. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1$ і $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, то при розв'язуванні виникає невизначеність $\left\{1^{\infty}\right\}$. Для її розкриття необхідно використовувати **другу визначну границю:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Приклад 30. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

<u>Розв'язок</u>:

Розглянемо окремо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)=1,$$

тоді, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}=2^{1}=2.$

Приклад 31. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}\right)^{x^2}$.

<u>Розв'язок</u>:

Розглянемо окремо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}=2 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to\infty}x^2=\infty,$$

тоді, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}\right)^{x^2}=2^{\infty}=\infty$.

Для розв'язання наступних задач скористуємось 2-ою визначною границею.

Приклад 32. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{5x}$.

Розв'язок:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{5x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^{\frac{3}{x}5x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{15x}{x}}=e^{15}.$$

* *В показнику ступеня доданий множник* $\frac{x}{3}$ *для того, щоб одержати* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}$ *, який дорівнює* e *. Множник* $\frac{3}{x}$ *за фігурними дужками компенсує множник* $\frac{x}{3}$ *. В наступному прикладі буде використаний аналогічний прийом.*

Приклад 33. Обчислити границю: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$.

Розв'язок:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)-1}{x+3}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+3}+\frac{-1}{x+3}\right)^{x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)^{\left(\frac{x+3}{-1}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x+3}\right)(x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{-1}{x+3}\right)(x+4)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x+3}\right)(x+4)}=e^{-1}.$$

Приклад 34. Обчислити границю: $\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{ctgx}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx} = \left\{1^{\infty}\right\} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = e.$$

6. Індивідуальні завдання.

Знайти границі функцій:

1.
$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x-1}}{5\sqrt{x^3}+2};\qquad б)\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x}{1-\sqrt{x}};$$

$$в)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x}$$

2.
$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^5}-x+4}{2x^2\left(\sqrt{x}+1\right)};\qquad б)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-x};$$

$$в)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\sin 5x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$$

3.
$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\sqrt{2x}+3x-4}{5x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)};\qquad б)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x^2-6x+5};$$

$$в)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{x+2}$$

4.
$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{5x}-2x+1}{x^2\left(\sqrt{x}+2\right)};\qquad б)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{x-\sqrt{x}};$$

$$в)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{1-\cos 3x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{x-1}$$

5.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3+2x+\sqrt{x^5}}{x^2\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3}\right)};\qquad б)\lim_{x\to1}\frac{x^3-x}{x^2-5x+4};$$
$$в)\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 2x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{x-2}$$

6.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+x\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{5x^3}+3};\qquad б)\lim_{x\to1}\frac{x^4-x}{\sqrt{x}-1};$$
$$в)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x\cdot tg 2x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$$

7.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x\sqrt{x}+3x+1\right)}{4+6\sqrt{x^5}};\qquad б)\lim_{x\to1}\frac{x^2-7x+6}{x-x^4};$$
$$в)\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 5x}{1-\cos 3x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4}{5x+5}\right)^{4x+1}$$

8.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+1};\qquad б)\lim_{x\to1}\frac{x^2-x^4}{\sqrt{x}-1};$$
$$в)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{\sin 2x\cdot\sin 3x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$$

9.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}+4\right)}{5x+\sqrt{x}+2};\qquad б)\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^3-1};$$
$$в)\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sin 3x}{1-\cos 5x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-7}{5x+1}\right)^{3x+1}$$

10.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(5x-\sqrt{x}+1\right)}{3+\sqrt{x^3}+x};\qquad б)\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+2x}$$
$$в)\lim_{x\to0}\frac{tg 2x\cdot\sin 3x}{1-\cos 6x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{3x}.$$

11. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\cdot\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x-1}}{5\sqrt{x^5}+x};$ $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x}-1};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2};$ $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{2x}$

12. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^3}-x+2}{4x\left(\sqrt{x}+7\right)};$ $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin 7x};$ $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{4x}$

13. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{2x}+3x^2-4}{5x\left(\sqrt[3]{x}-2x\right)};$ $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+5};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin 8x};$ $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{5x-2}$

14. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sqrt{2x}-2x+1}{x^2\left(3\sqrt{x}+5\right)};$ $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^3-1};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos 6x};$ $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x}\right)^{2x-1}$

15. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x+\sqrt{x^5}}{x^2\left(3\sqrt{x}+x\right)};$ $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos 2x};$ $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{7x-2}$

16. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+x\sqrt{x}\right)}{5\sqrt{x^5}+1}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot tg5x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+1}\right)^{x-2}$

17. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x}+3x+1\right)}{1-6\sqrt{x^3}}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 7x}{1-\cos 4x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+5}\right)^{4-x}$

18. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3\sqrt{x}+8\right)}{2\sqrt{x^5}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+1}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x^4}{x-1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin 2x\cdot\sin 5x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{3-2x}$

19. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)}{5x-\sqrt{x}+2}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x\cdot\sin 3x}{1-\cos 6x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-7}{4x+1}\right)^{4x+1}$

20. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(5x-\sqrt{x}+1\right)}{3+5\sqrt{x^7}+x}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+2x}$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg5x\cdot\arcsin 3x}{1-\cos 2x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{2-3x}$.

21. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\cdot\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x-1}}{5\sqrt{x^5}+2}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3tg(4x^2)}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{2-3x}$

22.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x^5}-x+4}{x^2\left(2-\sqrt{x}\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-\sqrt{x}};$$

$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{tg\,3x}{\sin 5x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3-2x}$$

23.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{2x}+3x-4}{5x^2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-6x+5};$$

$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin 5x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{3x+2}$$

24.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(5\sqrt{x}-2x+1)}{x^2\left(2-3\sqrt{x}\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-7x+6}{x^3-1};$$

$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 4x}{1-\cos 6x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{2x-1}$$

25.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1+2x+3\sqrt{x^5}}{x^2\left(2\sqrt{x}+x\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-5x+4};$$

$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 4x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x-1}$$

III. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

1. Поняття неперервності функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околу. Значення функції в цієї точці $f(x_0)$. Дамо x приріст Δx. Новому значенню аргументу відповідає нове значення функції $f(x_0 + \Delta x)$. Приріст функції дорівнює:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Визначення 1. Функція $y = f(x)$ ***<u>неперервна в точці</u>*** x_0, якщо вона визначена в цій точці, і нескінченно малому приросту аргументу в цієї точці відповідає нескінченне малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (рис. 7).

Це визначення можна розширити. Функція $y = f(x)$ ***<u>неперервна в точці</u>*** x_0, якщо:

1. Функція визначена в точці x_0 і в деякому її околу;
2. Однобічні границі однакові і співпадають із значенням функції в точці: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

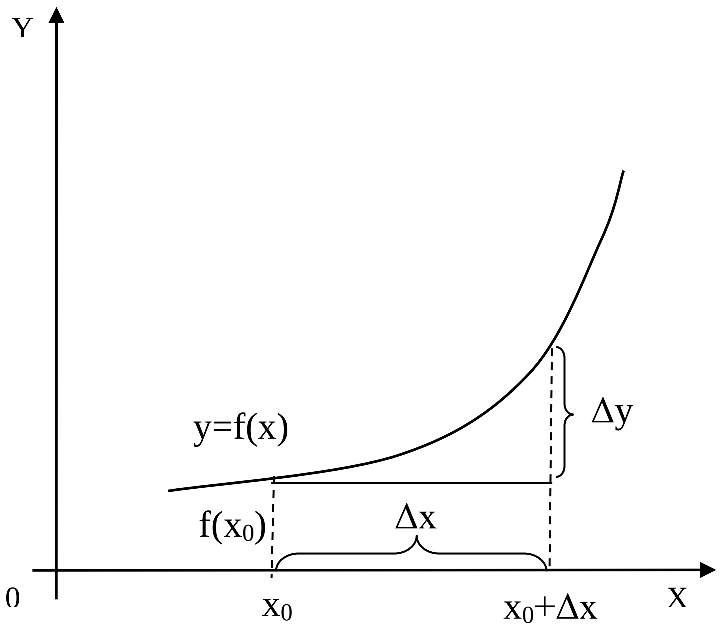


Рис. 7. Визначення поняття неперервності функції

2. Класифікація точок розриву

Точка x_0 зветься точкою розриву функції $y = f(x)$, якщо вона належить до області визначення функції або її границі і не є точкою неперервності.

1. ***Точки розриву І-го роду (скінчений розрив або «стрибок»)***. Якщо однобічні границі $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (рис. 8) функції в точці x_0 існують, обмежені, але не дорівнюють один одному, то говорять, що функція має в точці x_0 ***скінчений розрив І-го роду*** . ***Стрибком*** h функції $y = f(x)$ в точці розриву x_0 зветься різниця її однобічних границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, якщо вони різни. На рис. 8а стрибок функції $y = f(x)$ дорівнює $(a-b)$, де значення функції співпадає з правою границею функції (дорівнює a), на рис. 8б) стрибок функції $h = 0$ і має місто усувний розрив.

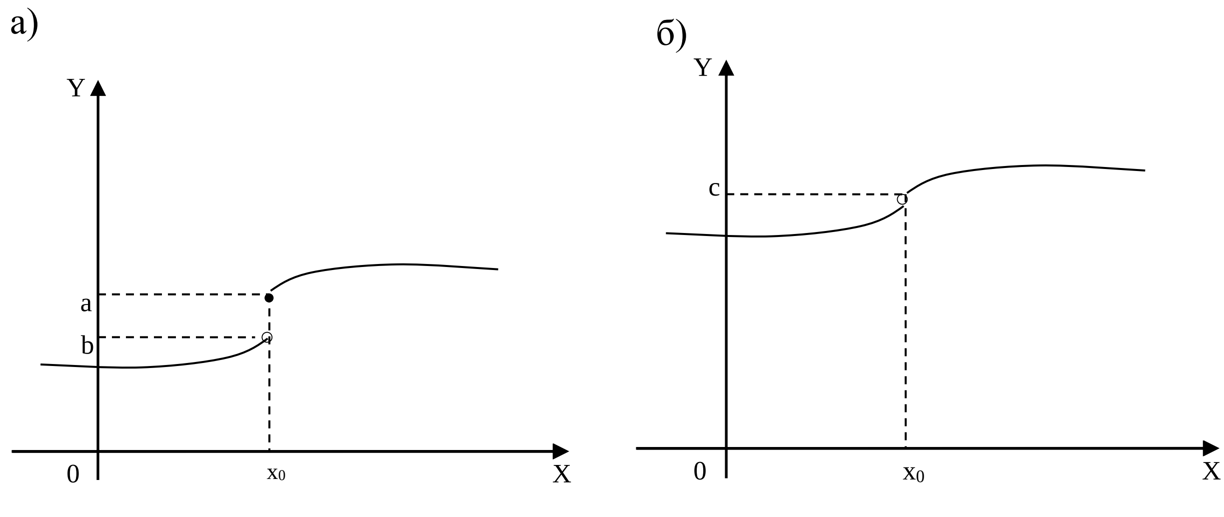


Рис. 8. Точки розриву І-го роду

2. ***Точки розриву ІІ-го роду (нескінчений розрив)*****.** Розрив функції в точці x_0 зветься **нескінченим**, якщо хоча б одна з однобічних границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існує або нескінчений. (рис. 9)

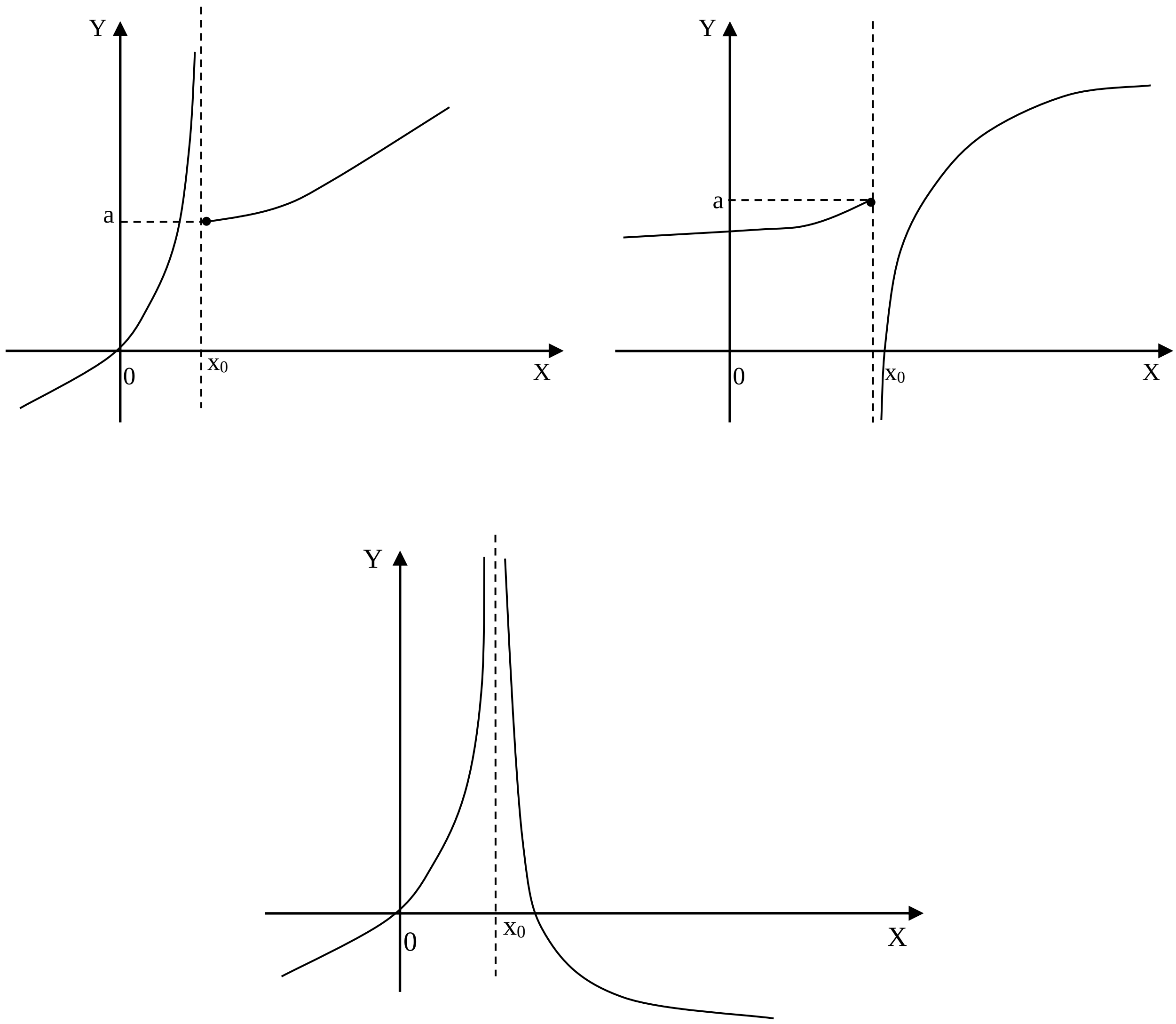


Рис. 9. Точки розриву ІІ-го роду

Всі елементарні функції неперервні в тих інтервалах, у яких вони визначені. Неелементарні функції можуть мати розриви як в точках, де вони не визначені, так и в точках, де вони визначені. Наприклад, якщо функція задана декількома різними аналітичними виразами для різних інтервалів змінення аргументу, то вона може мати розриві в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

Приклад 36. Знайти точки розриву функції $f(x)=\begin{cases} -x, & -\infty < x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x < \infty \end{cases}$,

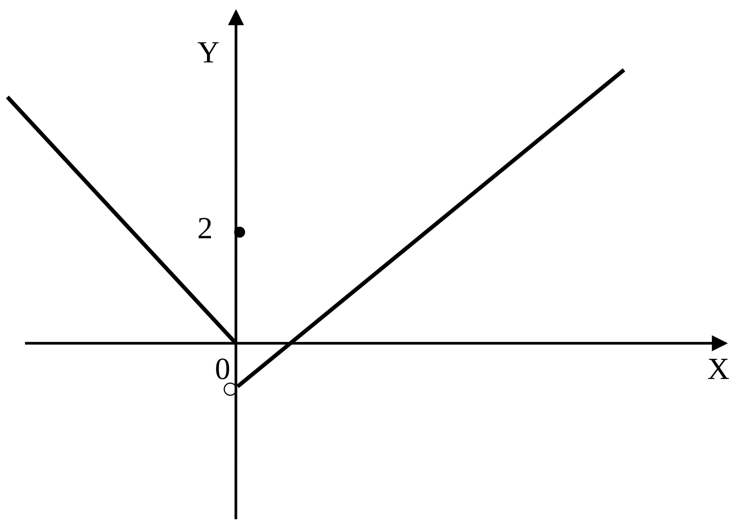
дослідити їх характер і побудувати графік.

Розв’язок. Функція складається з декількох аналітичних виразів для різних інтервалів x. На кожному інтервалі x вона задається неперервними функціями, отже, підозріла на розрив є лише точка $x = 0$. Знайдемо лівосторонню та правосторонню границі функції в точці $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-x) = 0;$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x-1) = -1.$$

Лівостороння та правостороння границі існують і вони різні, отже, в точці $x = 0$ існує розрив I-го роду. Стрибок функції $h = -1 - 0 = -1$. Побудуємо графік цієї функції.



Приклад 37. Знайти точки розриву функції $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$, дослідити їх характер і побудувати графік.

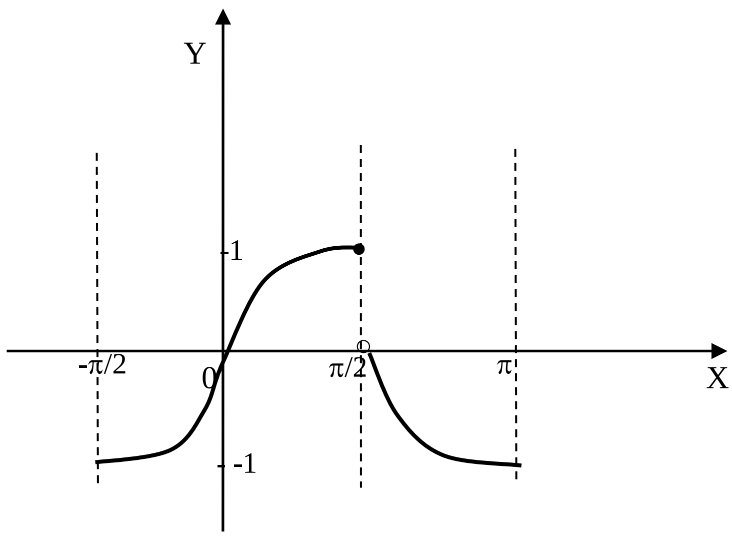
Розв’язок. Як і в попередньому прикладі, функція складається з двох неперервних часток, отже, підозріла на розрив є лише точка $x = \frac{\pi}{2}$. Знайдемо лівосторонню та правосторонню границі функції в точці $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \sin x = 1;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \cos x = 0.$$

Лівостороння та правостороння границі функції існують і вони різні, отже, в точці $x = \frac{\pi}{2}$ існує розрив І-го роду. $h = 0 - 1 = -1$.

Побудуємо графік цієї функції.



Приклад 38. Знайти точки розриву функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & 0 < x < \infty \end{cases}$,

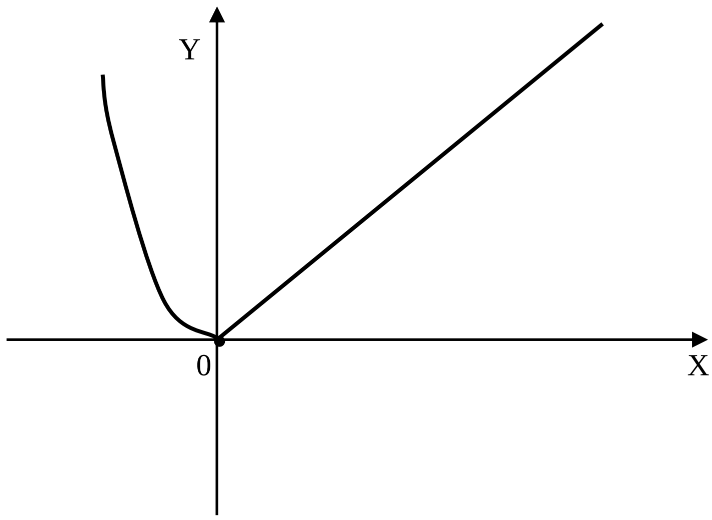
дослідити їх характер і побудувати графік.

<u>Розв’язок.</u> Знайдемо лівосторонню та правосторонню границі функції в точці $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x^2 = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x = 0; \; f(0) = 0.$$

Лівостороння та правостороння границі функції існують, дорівнюють одна одної і співпадають із значенням функції в точці $x=0$, отже функція $f(x)$ **неперервна**. Побудуємо її графік.

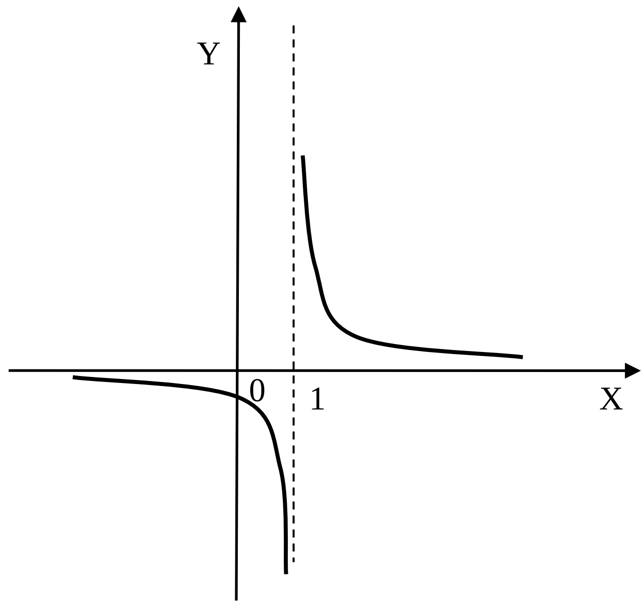


Приклад 39. Знайти точки розриву функції $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, дослідити їх характер і побудувати графік.

<u>Розв'язок.</u> Ця функція неперервна в усіх точках її області визначення. Область визначення функції $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty;\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

Лівостороння та правостороння границі функції нескінченні, отже, в точці $x=1$ маємо розрив II-го роду. Побудуємо графік цієї функції.



Приклад 40. Знайти точки розриву функції $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & -\infty<x<0\\ x, & 0\le x<\infty\end{cases}$,

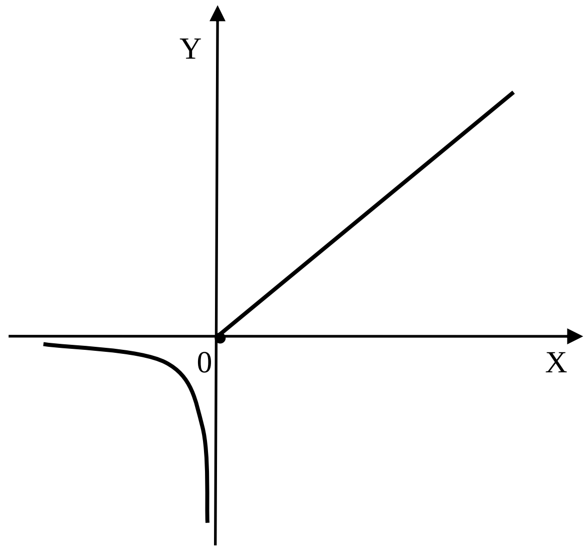
дослідити їх характер і побудувати графік.

<u>Розв’язок.</u> Функція $\frac{1}{x}$ неперервна в усіх точках своєї області визначення. Область визначення функції $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Отже, дослідимо на розрив точку $x=0$. Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі функції в точці $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x)=0.$$

Лівостороння границя нескінчена, отже, в точці $x=0$ маємо розрив II-го роду. Побудуємо графік цієї функції.



3. Індивідуальні завдання

1. Знайти точки розриву і побудувати графіки функцій:

Варіант 1

1. $y=\begin{cases}2^x, & -1\le x\le 1\\ x-1, & 1<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$ 2. $y=\frac{1}{x+1}$

Варіант 2

1. $y=\begin{cases} x^2+2, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le 1 \\ 2x+3, & x>1 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$

Варіант 3

1. $y=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x\le 0 \\ 2x+3, & x>0 \end{cases}$ 2. $y=\ln x+\dfrac{1}{x-1}$

Варіант 4

1. $y=\begin{cases} 2x+3, & x\le 0 \\ \sin x, & 0<x\le \pi \\ x^2+4, & x>\pi \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$

Варіант 5

1. $y=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ \cos x, & 1<x\le \pi \\ 2x, & x>\pi \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{x-1}{x+3}$

Варіант 6

1. $y=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1 \\ 4-2x, & 1<x<2{,}5 \\ 2x-7, & 2{,}5\le x\le 4 \end{cases}$ 2. $y=3^{\frac{x}{4-x^2}}$

Варіант 7

1. $y=\begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4} \\ 1, & x=\dfrac{\pi}{4} \\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4}<x\le \pi \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{x^3-x^2}{2(x-1)}$

Варіант 8

1. $y = \begin{cases} \sin x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 2 \\ 3x+1, & x > 2 \end{cases}$

2. $y = x + \dfrac{1}{x+2}$

Варіант 9

1. $y = \begin{cases} 2, & x = 0, x = \pm 2 \\ 4 - x^2, & 0 < |x| \prec 2 \\ 4, & |x| > 2 \end{cases}$

2. $y = x^2 + 5x + \dfrac{1}{x}$

Варіант 10

1. $y = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le \pi \\ 2x+1, & x > \pi \end{cases}$

2. $y = 2 - \dfrac{1}{x}$

Варіант 11

1. $y = \begin{cases} 2^x, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

2. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$

Варіант 12

1. $y = \begin{cases} arctgx, & x \le 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$

2. $y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$

Варіант 13

1. $y = \begin{cases} \ln(x+3), & -3 < x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

2. $y = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Варіант 14

1. $y = \begin{cases} \arcsin x, & -1 \le x < 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

2. $y = \dfrac{x^3 + x}{2x}$

Варіант 15

1. $y = \begin{cases} tgx, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{4 - x^2}{x - 5}$

Варіант 16

1. $y = \begin{cases} tg2x, & -\dfrac{\pi}{4} < x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \\ x + 5, & x > 2 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}$

Варіант 17

1. $y = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x + 1, & 0 \le x < 2 \\ x^2, & x \ge 2 \end{cases}$ 2. $y = 1 + \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

Варіант 18

1. $y = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \le 1 \\ 2x, & 1 < x < 3 \\ x^2 + 1, & x \ge 3 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1 + 2x}{x + 1}$

Варіант 19

1. $y = \begin{cases} 3x^2 + 2, & x \le 0 \\ x + 2, & 0 < x \le 1 \\ x^2 + 5, & x > 1 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1 + 2x}{x + 4}$

Варіант 20

1. $y = \begin{cases} arctgx, & x \le 0 \\ x^2 - 2, & x > 0 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1}{x + 3}$

Варіант 21

1. $y = \begin{cases} 3^x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x \le 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$ 2. $y = 3x + \dfrac{1}{x}$

Варіант 22

1. $y = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \le 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Варіант 23

1. $y = \begin{cases} \arccos x, & -1 \le x < 0 \\ x^2 + 2, & x \ge 0 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Варіант 24

1. $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x + 3, & x \ge 2 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

Варіант 25

1. $y = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x < 0 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{x - 7}{x - 2}$

Список літератури

1. Є.С. Сінайський, Л.В. *Новікова, Л.І. Заславська Вища математика Дніпропетровськ. НГУ. 2004 (частина 1)*
2. Геворкян Ю.Л. Теорія границь і диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посібник.- К.: ІСДО, 1993.-124 с.
3. Олексенко В. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: підручник. – Харків: НТУ «ХПІ», 2000 – 372 с.
4. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т.1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник / Л.В.Курпа, Ж.Б.Кашуба, Г.Б.Лінник [та ін.]; за ред. Л.В.Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – 532с.
5. Вища математика. Розв’язання задач та варіанти типових розрахунків. Т.1.: Навч. Посібник / За ред. Л.В.Курпа. — Харків: НТУ “ХПІ”, 2002 – 316с.
6. Тестові завдання за темою «Диференціювання функції однієї змінної». / упоряди.: Сушко С.О., Сточай В.Ф., Фомичова Л.Я. – Дніпропетровськ: Національний Гірничий університет, 2006. – 70 с.
7. Практикум з початків математичного аналізу: Навчальний посібник./ Новикова Л.В., Уланова Н.П., Приходько В.В. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 109 с.
8. Математика 1. Конспект лекцій. Частина 1. / Л.Я.Фомичова– Дніпро: ТОВ «Лізунов Прес», 2017. – 72 с.
9. Практикум з початків математичного аналізу: навч. посібник / Новикова Л.В., Уланова Н.П., Приходько В.В. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 109 с.

Навчальне видання

Сдвижкова Олена Олександрівна
Бабець Дмитро Володимирович
Тимченко Світлана Євгенівна
Клименко Діна Володимирівна

ФУНКЦІЯ. ГРАНИЦЯ. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЇ.

Методичні рекомендації до практичних занять
з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 «Прикладна математика»

В авторській редакції

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро просп. Дмитра Яворницького , 19